



MACROECONOMETRIA II

Mestrado em Econometria Aplicada e
Previsão

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Jorge Caiado
Departamento de Matemática e CEMAPRE,
Instituto Superior de Economia e Gestão/UTL,
Email: jcaiado@iseg.utl.pt
Web: <http://pascal.iseg.utl.pt/~jcaiado/>

Lisboa

1. Considere o seguinte modelo VAR(1) bivariado

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

- Será Y_{1t} um processo estacionário?
- Determine A_1^2 e A_1^3 . Será que A_1^n se aproxima de 0 (isto é, da matriz nula) à medida que n aumenta?
- Análise o comportamento da função de resposta de Y_{1t} ao impulso de um choque em ε_{1t} e ao impulso de um choque em ε_{2t} .
- Suponha que $\varepsilon_{1t} = u_{1t} + 0.5u_{2t}$ e $\varepsilon_{2t} = u_{2t}$. Analise o comportamento da função de resposta de Y_{1t} ao impulso de um choque em u_{1t} ? E em u_{2t} ?
- Suponha que $\varepsilon_{1t} = u_{1t}$ e $\varepsilon_{2t} = 0.5u_{1t} + u_{2t}$. Analise o comportamento da função de resposta de Y_{1t} ao impulso de um choque em u_{1t} ? E em u_{2t} ?
- Com base nas respostas às alíneas d) e f), explique a importância da ordenação das variáveis na decomposição de Choleski.

2. Considere o seguinte modelo VAR(2) tri-dimensional:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ Y_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \\ Y_{3,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1,t-2} \\ Y_{2,t-2} \\ Y_{3,t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0.26 & 0.03 & 0 \\ 0.03 & 0.09 & 0 \\ 0 & 0 & 0.81 \end{bmatrix} = PP' \quad P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}$$

- Mostre que o processo $Y_t = (Y_{1t}, Y_{2t}, Y_{3t})'$ é estável?
- Determine o vector da média de Y_t .
- Calcule as matrizes de coeficientes $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_5$ da representação MA do processo Y_t .

3. Suponha que os resíduos de um modelo VAR conduziram às seguintes grandezas: $Var(\varepsilon_{1t}) = 0.75$, $Var(\varepsilon_{2t}) = 0.5$ e $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = 0.25$.

- Mostre que não é possível identificar o modelo VAR estrutural.
- Usando a decomposição de Choleski para $b_{12} = 0$, proceda à identificação dos valores de b_{21} , $Var(u_{1t})$ e $Var(u_{2t})$.
- Usando a decomposição de Choleski para $b_{21} = 0$, proceda à identificação dos valores de b_{12} , $Var(u_{1t})$ e $Var(u_{2t})$.
- Usando a decomposição de Sims-Bernake para $b_{12} = 0.5$, proceda à identificação dos valores de b_{21} , $Var(u_{1t})$ e $Var(u_{2t})$.
- Usando a decomposição de Sims-Bernake para $b_{21} = 0.5$, proceda à identificação dos valores de b_{12} , $Var(u_{1t})$ e $Var(u_{2t})$.
- Suponha que as primeiras três observações residuais de ε_{1t} são 1,0 e -1 e as primeiras três observações residuais de ε_{2t} são -1,0 e 1. Determine as primeiras três observações dos choques u_{1t} e u_{2t} com base em cada uma das decomposições efectuadas nas alíneas b) a e).

4. Na base de dados em EViews encontra uma página designada por "Money_demand" com as seguintes séries macroeconómicas dos Estados Unidos: PIB real ($RGDP$), PIB nominal (GDP), oferta de moeda ($M2$) e a taxa de juro de bilhetes do tesouro a 3 meses ($TB3MO$). Construa as seguintes variáveis:

$$DLRGDP = \ln(RGDP) - \ln(RGDP(-1))$$

$$PRICE = GDP/RGDP \text{ (deflactor do GDP)}$$

$$DLRM2 = \ln(M2/PRICE) - \ln(M2(-1)/PRICE(-1))$$

$$DRS = TB3MO - TB3MO(-1)$$

- Estime um VAR(12) tri-dimensional para as variáveis $DLRGDP$, $DLRM2$ e DRS (inclua um vector de constantes).
- Calcule as estatísticas multivariadas AIC e BIC.
- Reestime o modelo VAR usando 8 defasamentos para cada variável.

- d) Teste a adequação da ordem de defasamento do VAR através do teste do rácio de verosimilhanças.
- e) Com base no modelo VAR(12), mostre que a variável *DRS* não é exógena para as outras duas variáveis do sistema.
- f) Proceda a testes de causalidade à Granger para as especificações VAR(8) e VAR(12).
- g) Obtenha as funções de resposta a impulsos (a 12 passos) e os respectivos intervalos de confiança com dois desvios padrão.

5. Considere o seguinte modelo VAR(1) bivariado

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

a) Mostre que a solução de Y_{1t} pode escrever-se na forma

$$Y_{1t} = \frac{[(1 - a_{22}L)\varepsilon_{1t} + (1 - a_{22})a_{10} + a_{12}L\varepsilon_{2t} + a_{12}a_{20}]}{[(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2]}$$

b) Determine a solução de Y_{2t} .

c) Suponha que Y_{1t} e Y_{2t} são $C(1,1)$. Escreva o modelo de correcção do erro. Mostre que o modelo de correcção do erro contém um termo independente.

d) Mostre que Y_{1t} e Y_{2t} têm o mesmo termo de tendência determinística (isto é, os coeficientes associados aos termos de tendência são idênticos).

e) Qual a condição para que o coeficiente do termo de tendência seja zero? Mostre que esta condição faz com que a constante possa ser incluída no vector cointegrante.

6. Na base de dados do EViews encontra uma página intitulada “Quarterly_US” com as séries temporais das taxas de juro de títulos públicos a três meses (TBILL), a três anos (R3) e a dez anos (R10), nos Estados Unidos, entre 1960Q1 a 2008Q1 (base trimestral).
- a) Teste a presença de uma raiz unitária em cada uma das séries temporais com base do teste ADF. Considere um nível de 5%.
 - b) Estime as equações de cointegração com base na metodologia de Engle-Granger. Teste a presença de uma raiz unitária nos resíduos das equações de cointegração. Serão as variáveis cointegradas?
 - c) Estime modelos de correcção do erro usando sete desfasamentos de cada variável. Use o vector dos resíduos obtidos na alínea b) como termos de correcção do erro e não inclua termos independentes.
 - d) Efectue testes de avaliação do diagnóstico aos modelos estimados na alínea c). Será que as três séries residuais têm comportamentos análogos a ruídos brancos? Serão os comprimentos dos desfasamentos adequados?
 - e) Ainda em relação aos modelos estimados na alínea c), será que alguma das taxas de juro é exogenamente fraca?
 - f) Estime o modelo usando o método de Johansen e teste a cointegração entre as variáveis. Considere sete desfasamentos e inclua um termo independente no vector cointegrante.

7. Suponha que se estimou a seguinte matriz Π :

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.5 & 0.2 \\ 0.3 & -0.25 & 0.1 \\ 1.2 & -1.0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

- Mostre que o determinante de Π é zero.
- Mostre que duas das raízes características são zero e a terceira é 0.75.
- Seja $\beta' = (3, -2.5, 1)$ o único vector cointegrante normalizado em relação a Y_{3t} , determine o vector α tal que $\Pi = \alpha\beta'$. Que alteração ocorreria em α se β for normalizado em relação a Y_{3t} ?
- Como poderia testar a restrição $\beta_1 + \beta_2 = 0$

8. Considere o seguinte modelo VAR(1) bivariado

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ X_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ X_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

- Será o modelo estável?
- Qual a função de resposta de Y_t ao impulso de um choque em ε_{1t} ? E ao impulso de um choque em ε_{2t} .
- Será que a função de resposta de Y_t ao impulso de um choque em ε_{1t} se alteraria no caso de $a_{10} = 0.2$? Justifique.

9. Considere o seguinte modelo VAR(1) bivariado

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ X_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ X_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

- Mostre que cada uma das variáveis, Y_t e X_t , é $I(1)$.
- Mostre que as variáveis Y_t e X_t são cointegradas. Qual o vector de cointegração?
- Represente o modelo na forma MA.
- Represente o modelo na forma de correcção do erro.

10. Com base num modelo VAR com 3 variáveis, foi estimada a seguinte matriz Π :

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.75 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

a) Determine as suas raízes características.

b) Seja $\beta = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.75 \\ 0.4 & 0.25 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$. Determine a matriz α (3x2), tal que $\Pi = \alpha\beta'$.

c) Se β for normalizado em relação a Y_{2t} , qual a matriz α daí resultante?

11. Considere o seguinte modelo VAR(1) bivariado:

$$(I - A_1L)Z_t = \varepsilon_t,$$

onde: $Z_t = (X_t, Y_t)'$, $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})'$, $A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$ e $\Sigma_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.6 & 1 \end{bmatrix}$

a) Será o processo Z_t estacionário? Justifique

b) Suponha que $\varepsilon_{1t} = u_{1t} - 0.5u_{2t}$ e $\varepsilon_{2t} = -0.5u_{1t} + u_{2t}$. Qual a função de resposta de X_t ao impulso de um choque em u_{1t} ? E ao impulso de um choque em u_{2t} ?

c) Suponha que os três primeiros valores de ε_{1t} foram 1, 0 e -1 os três primeiros valores de ε_{2t} foram -1, 0 e 1. Usando uma adequada decomposição estrutural impondo a restrição $Var(u_{1t}) = 2.33$, determine os primeiros três choques de u_{1t} e u_{2t} .

12. Considere o seguinte modelo VAR(2) bivariado:

$$(I - A_1L - A_2L^2)(1 - L)Z_t = \varepsilon_t,$$

onde: $Z_t = (X_t, Y_t)'$, $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})'$, $A_1 = \begin{bmatrix} -0.26 & 0.54 \\ 0 & 0.48 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -0.51 & 0 \\ -0.27 & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{e } \Sigma_\varepsilon = \begin{bmatrix} 31.32 & 17.05 \\ 17.05 & 43.30 \end{bmatrix}$$

- a) Escreva cada uma das equações do processo Z_t sem o operador atraso.
- b) Suponha que $X_1 = 608, \dots, X_{52} = 639, X_{53} = 644, X_{54} = 564, Y_1 = 1016, \dots, Y_{52} = 1390, Y_{53} = 1387, Y_{54} = 1289$. Determine a previsão a 1 passo à frente de X_t e Y_t com origem em $t = 54$.

13. Suponha que as variáveis Y_t e X_t são integradas de ordem 1 e 2, respectivamente, e podem ser representadas por processos do tipo passeio aleatório, $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_{1t}$ e $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_{2t}$.

- a) Mostre que a combinação linear $\beta_1 Y_t + \beta_2 X_t$ contém uma tendência estocástica.
- b) Que pressuposto é necessário impor para que Y_t e X_t sejam $CI(1,1)$?

Soluções

1. a) Não
- b) Não, $(A_1)^n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$
- c) $\varepsilon_{1t} \rightarrow Y_{1t} : 0.8; 0.68; 0.608$ $\varepsilon_{2t} \rightarrow Y_{1t} : 0.2; 0.32; 0.392$
- d) $u_{1t} \rightarrow Y_{1t} : 0.7; 0.52; 0.412$ $u_{2t} \rightarrow Y_{1t} : 0.2; 0.32; 0.392$
- e) $u_{1t} \rightarrow Y_{1t} : 0.8; 0.68; 0.608$ $u_{2t} \rightarrow Y_{1t} : -0.2; -0.02; 0.088$
3. a) $Var(u_{1t}) = 0.75, b_{21} = -1/3$ e $Var(u_{2t}) = 5/8$
- b) $Var(u_{1t}) = 5/8, b_{12} = -1/2$ e $Var(u_{2t}) = 0.5$
- c) $Var(u_{1t}) = 1.125, b_{21} = -6/7$ e $Var(u_{2t}) = 61/98$
- d) $Var(u_{1t}) = 0.75, b_{12} = -1$ e $Var(u_{2t}) = 0.9375$
- f)
- $b_{12} = 0$: $Var(u_{1t}) = 2/3, b_{21} = 1$ e $Var(u_{2t}) = 0$; $u_{1t} = (1, 0, -1)$ e $u_{2t} = (0, 0, 0)$
- $b_{21} = 0$: $Var(u_{1t}) = 0, b_{21} = 1$ e $Var(u_{2t}) = 2/3$; $u_{1t} = (0, 0, 0)$ e $u_{2t} = (-1, 0, 1)$
- $b_{12} = 0.5$: $Var(u_{1t}) = 1/6, b_{21} = 1$ e $Var(u_{2t}) = 0$; $u_{1t} = (0.5, 0, -0.5)$ e $u_{2t} = (0, 0, 0)$
- $b_{21} = 0.5$: $Var(u_{1t}) = 0, b_{21} = 1$ e $Var(u_{2t}) = 1/6$; $u_{1t} = (0, 0, 0)$ e $u_{2t} = (-0.5, 0, 0.5)$
5. b) $Y_{2t} = [a_{21}L(a_{10} + \varepsilon_{1t}) + (1 - a_{11}L)(a_{20} + \varepsilon_{2t})] / [(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2]$
- c) $\Delta Y_{1t} = \alpha_1(Y_{1,t-1} - \beta Y_{2,t-1}) + \varepsilon_{1t} + a_{10}$ $\Delta Y_{2t} = \alpha_2(Y_{1,t-1} - \beta Y_{2,t-1}) + \varepsilon_{2t} + a_{20}$
- com $\alpha_1 = -a_{12}a_{21} / (1 - a_{22})$; $\alpha_2 = a_{21}$; $\beta = (1 - a_{22}) / a_{21}$
- e) $Y_{1,t-1} - \beta Y_{2,t-1} + a_{20} / a_{21}$
7. b) $\lambda = (0, 0, 0.75)$
- c) $\alpha = (0.2, 0.1, 0.4)$. Com $\beta' = (1, -5/6, 1/3)$, tem-se: $\alpha = (0.6, 0.3, 1.2)$
- d) $T[\ln(1 - \lambda_1^*) - \ln(1 - \hat{\lambda}_1^*)]$ para $r = 1$